Coloración

Sea $G = (V, E)$ un grafo y $C = \{x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n\}$ un conjunto de n “colores”. Cualquier función $f: V \to C$ es una coloración del grafo G con n colores.

Para cada vértice v, $f(v)$ es el color de v.

Coloración Propia

Una coloración $f: V \to C$ de un grafo $G = (V, E)$ es una coloración propia si siempre que $\{u, v\} \in E$ se tiene $f(u) \neq f(v)$; es decir, vértices adyacentes tienen colores diferentes.

Número Cromático

El número cromático de un grafo G, denotado por $\chi(G)$, es el número mínimo de colores necesarios para obtener una coloración propia de G.

En general, el problema de hallar el número cromático de un grafo no es fácil. Sin embargo, existen varios métodos y resultados que nos pueden ayudar. Por ejemplo:

(1) Si el grado máximo en un grafo G es k, entonces $\chi(G) \leq k + 1$.

(2) Si H es un subgrafo de G, entonces $\chi(H) \leq \chi(G)$.

(3) $\chi(K_n) = n$.

(4) Si G es un grafo bipartito, entonces $\chi(G) = 2$.

Además, para probar que $\chi(G) = k$, debemos hacer dos cosas:

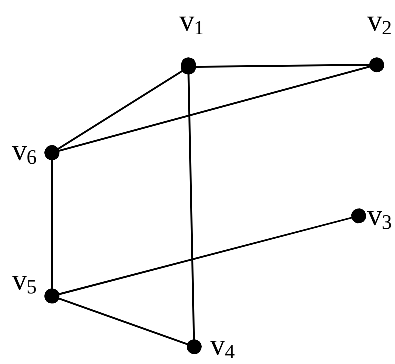
1.- Encontrar una coloración con k colores.

2.- Probar que no existe una coloración con menos de k colores.

Un método para asignar colores a los vértices de un grafo es el que se conoce como **algoritmo glotón**. En este algoritmo se les da un orden a los vértices y se le asigna colores, siguiendo un orden determinado, de tal manera que cada vértice reciba el primer color que no ha sido asignado a sus vecinos.

Ejemplo

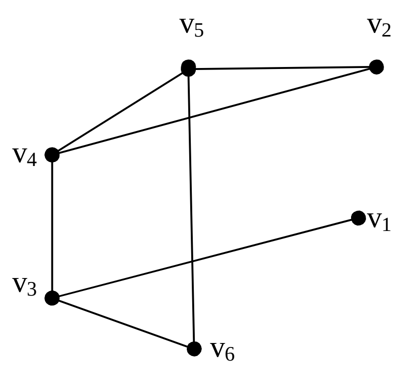
Consideremos el siguiente grafo G en el que los vértices han sido ordenados de cierta manera:



Entonces, comenzamos asignando el color **1** a v_1. Como v_2 es adyacente a v_1, le asignamos el color **2**. Como v_3 no es adyacente a v_1, le asignamos el color **1**. Ahora, v_4 es adyacente a v_1 pero no es adyacente a v_2, así que le asignamos el color **2**. Como v_5 es adyacente a v_3 (que tiene el color **1**) y es adyacente a v_2 (que tiene el color **2**) , le asignamos el color **3**. Finalmente v_6 es adyacente a v_1, v_2 y v_5 (que tienen los colores **1**, **2** y **3**, respectivamente) le asignamos el color **4**.

Como hemos usado 4 colores, tenemos que $\chi(G) \leq 4$.

Si consideramos otro orden para los vértices tenemos:



Repitiendo el proceso anterior, obtenemos la coloración:

$$v_1 \to \mathbf{1}\ ,\ v_2 \to \mathbf{1}\ , v_3 \to \mathbf{2}\ , v_4 \to \mathbf{3}\ , v_5 \to \mathbf{2}\ , v_6 \to \mathbf{1}$$

Obtenemos entonces $\chi(G) \leq 3$. Como K_3 es un subgrafo de G y $\chi(K_3) = 3$, tenemos que:

$$3 = \chi(K_3) \leq \chi(G) \leq 3$$

En consecuencia, $\chi(G) = 3$.

Polinomios Cromáticos

Sea G un grafo y $\lambda \geq 0$ un entero. Sea $P(G,\lambda)$ el número de coloraciones propias de G con un máximo de λ colores.

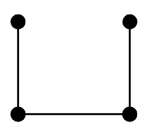
Nótese que, $P(G,\lambda)$ es un valor que depende del valor de λ y, por lo tanto es una función.

$P(G,\lambda)$ se llama polinomio cromático de G.

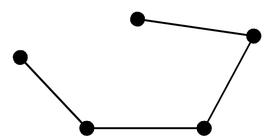
Ejemplos

1. Sea $G = (V,E)$ con $|V| = n$ y $E = \emptyset$. Entonces, G tiene n vértices aislados y, como a cada vértice se le puede asignar cualquiera de los λ colores, por el principio de la multiplicación tenemos que $P(G,\lambda) = \lambda^n$.
2. Si $G = K_n$, entonces necesitamos al menos n colores para obtener una coloración propia, entonces:
   si $\lambda < n$, $P(G,\lambda) = 0$ y
   si $\lambda \geq n$, $P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)$

3. Consideremos los siguientes grafos:



G_1



G_2

Entonces se tiene:

$$P(G_1,\lambda) = \lambda(\lambda-1)^3 \quad \text{y} \quad P(G_2,\lambda) = \lambda(\lambda-1)^4$$

En general, si G es un camino simple con n vértices, entonces $P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$

El polinomio cromático se puede usar para determinar el número cromático de un grafo. Para ver esto, consideremos el ejemplo 3. Tenemos que: $P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$. Ahora:

$$P(G,0) = 0$$

$$P(G,1) = 0$$

$$P(G,2) = 2$$

Así, no existen coloraciones propias de G con 0 colores ni con 1 color y existen 2 coloraciones con dos colores. Por lo tanto $\chi(G) = 2$.

Esto es válido en general; es decir:

Si G es un grafo sin lados paralelos, entonces $\chi(G)$ es el menor entero positivo k para el cual $P(G,k) \neq 0$.

Tenemos el siguiente resultado para grafos disconexos:

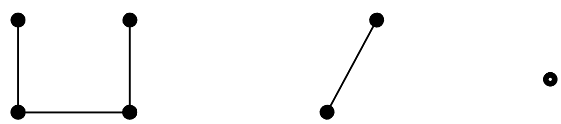
Teorema

Si G es un grafo disconexo con componentes conexas $G_1, G_2, \ldots, G_k$, entonces:

$$P(G,\lambda) = P(G_1,\lambda)P(G_2,\lambda) \cdots P(G_k,\lambda)$$

Ejemplo

Sea G el grafo:



Entonces:

$$P(G,\lambda) = P(G_1,\lambda)P(G_2,\lambda)P(G_3,\lambda) = \lambda(\lambda-1)^3\lambda(\lambda-1)\lambda = \lambda^3(\lambda-1)^4$$